# SOBRE EL ESTABLECIMIENTO DE ESTIMADORES E INDICADORES PARA LOS METODOS DE CONTORNO P-ADAPTABLES EN PROBLEMAS DE POTENCIAL.

E. ALARCON

Cátedra de Estructuras. E.T.S.I.I. Universidad Politécnica de Madrid.

El establecimiento de métodos numéricos capaces de garantizar una cota de exactitud previamente establecida y de autoadaptar la discretización inicial hasta conseguirlo es una de las tendencias más atractivas en la actualidad. En artículos previos se ha mostrado cómo se puede conseguir ésto con el método de los elementos de contorno y aquí se desarrollan nuevas ideas, inspiradas en tratamientos paralelos con el método de los elementos finitos, para fijar los criterios de adaptación y estimación.

## 1. INTRODUCCION

El desarrollo se realiza para problemas de potencial, donde la fórmula de representación toma el aspecto:

$$C\,\phi\,(P) + \int_{\partial\Omega} \phi(Q)\; q^*(P,Q) = \int_{\partial\Omega} q(Q)\;\phi^*(P,Q) \tag{1}$$

donde $\phi^*$ y $q^*$ son los campos de potencial y flujo, respectivamente, generados en un punto Q del contorno $\partial\Omega$ al aplicar la solución fundamental de la ecuación de Laplace en un punto P del contorno. C es una constante relacionada con las características de la geometría del contorno en el punto P.

El contorno $\partial\Omega$ se considera, en general, dividido en dos partes $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$ según sean datos las condiciones de potencial o flujo (Condiciones tipo Dirichlet o tipo Neumann). Es decir:

$$\begin{array}{llll} \text{En} & \partial\Omega_1 & \phi = \phi^o & q = ? \\ & & & \\ \text{En} & \partial\Omega_2 & \phi = ? & q = q^o \end{array} \tag{2}$$

Explicitando estas condiciones la relación 1 se escribe:

$$C\,\phi\,(P) + \int_{\partial\Omega_2} \phi(Q)\,.q^*(P,Q) - \int_{\partial\Omega_1} q(Q)\,.\phi^*(P,Q) = -\int_{\partial\Omega_1} \phi^o(Q)\,.q^*(P,Q)\; +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_2} q^o(Q)\,.\phi^*(P,Q) \tag{3}$$

que puede escribirse en forma condensada como:

$$L_1\, q(P) + L_2\,\phi\,(P) + p(P) = 0 \tag{4}$$

si se acepta la siguiente

DEFINICION 1

$$L_1\, f(P) = -\int_{\partial\Omega_1} f(Q)\,\phi^*(P,Q)$$

$$L_2\, f(P) = C\, f(P) + \int_{\partial\Omega_2} f(Q)\,q^*(P,Q)$$

$$p(P) = \int_{\partial\Omega_1} f^{o}(Q)\,q^*(P,Q) - \int_{\partial\Omega_2} \left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{Q}^{o} \phi^*(P,Q) \tag{5}$$

2. APROXIMACION

Flujo y potencial incógnitas son aproximadas en los contornos $\partial\Omega_2$ y $\partial\Omega_1$ respectivamente mediante expresiones del tipo:

$$\begin{aligned} \phi \sim \hat{\phi} &= a_1 N_1 + a_2 N_2 + \dots + a_n N_n \qquad \text{en } \partial\Omega_2 \\ q \sim \hat{q} &= b_1 N_1 + b_2 N_2 + \dots + b_n N_n \qquad \text{en } \partial\Omega_1 \end{aligned} \tag{6}$$

donde $a_j$ y $b_j$ son parámetros a determinar, mientras las $N_j$ son individuos de una familia jerarquizada de funciones.

Con esta aproximación se cometen los errores:

$$\begin{aligned} e_1 &= q - \hat{q} \quad \text{en } \partial\Omega_1 \qquad & e_1 &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_2 \\ e_2 &= \phi - \hat{\phi} \quad \text{en } \partial\Omega_2 \qquad & e_2 &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_1 \end{aligned} \tag{7}$$

y se define el residuo r como el resultado de sustituir en (4) la aproximación (6), es decir:

$$r = L_1\, \hat{q} + L_2\, \hat{\phi} + p \tag{8}$$

Debe observarse que en los puntos de colocación el residuo es cero y que, mediante la aplicación de la regla (8), puede calcularse en cualquier otro punto del contorno.

Es evidente que de (7) se deduce:

$$\begin{aligned} L_1\, \hat{q} &= L_1\, q - L_1\, e_1 \\ L_2\, \hat{\phi} &= L_2\, \phi - L_2\, e_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Así pues, el residuo se puede expresar como:

$$r = L_1\, q + L_2\, \phi + p - (L_1\, e_1 + L_2\, e_2) \tag{10}$$

y, teniendo en cuenta (4):

$$r = -(L_1 e_1 + L_2 e_2) \tag{11}$$

o bien, reordenando:

$$L_1 e_1 + L_2 e_2 + r = 0 \tag{12}$$

que hace aparecer los residuos como las "cargas" que equilibran los errores.

Según se desprende de (7):

$$\begin{array}{lll} \text{En} & \partial\Omega_1 : & r = -L_1 e_1 = r_1 \\ \text{En} & \partial\Omega_2 : & r = -L_2 e_2 = r_2 \end{array} \tag{13}$$

## 3. ERROR ENERGETICO

Aunque el método de los elementos de contorno es un método de colocación se puede utilizar una técnica semejante a la de Galerkin para establecer un error energético. Se define así:

DEFINICION 2

$$||e||_E^2 = \int_{\partial\Omega_1} e_1 (L_1 e_1) + \int_{\partial\Omega_2} e_2 (L_2 e_2) = -\int_{\partial\Omega_1} e_1 r_1 - \int_{\partial\Omega_2} e_2 r_2 \tag{14}$$

que conviene explicitar para comprender su complejidad:

$$||e||_E^2 = \int_{\partial\Omega_1} e_1(P) \left[ -\int_{\partial\Omega_1} e_1(Q)\phi^*(P,Q) \right] + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_2} \left[ e_2(P) \right]^2 + \int_{\partial\Omega_2} e_2(P) \left[ \int_{\partial\Omega_2} e_2(Q).q^*(P,Q) \right] \tag{15}$$

donde el término $\frac{1}{2}$ del segundo sumando (en el segundo miembro) surge al interpretar sobre trozos de elementos con tangente continua.

Una interesante propiedad de la definición 2 se obtiene considerando que el flujo es exacto y se mejora el potencial (el potencial es exacto y se mejora el flujo) mediante la adición de una nueva función. Es decir:

$$\begin{array}{c} \phi \sim \hat{\hat{\phi}} = \hat{\phi} + a_{n+1} N_{n+1} \\ ( q \sim \hat{\hat{q}} = \hat{q} + b_{m+1} N_{m+1} ) \end{array} \tag{16}$$

de modo que:

$$e_2 = \phi - \hat{\phi} \sim a_{n+1} N_{n+1}$$

$$( e_1 = q - \hat{q} \sim n_{m+1} N_{m+1} ) \tag{17}$$

con ello, sustituyendo en (14):

$$||e||_E^2 = - a_{n+1} \int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} r_2$$

$$( ||e||_E^2 = - b_{m+1} \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} r_1 ) \tag{18}$$

Es decir, se ve que el error energético está relacionado con la proyección del residuo sobre la nueva función de interpolación. Este error sirve pues para <u>indicar</u> hasta qué punto es útil la introducción de la nueva función pero no para <u>estimar</u> el valor del residuo. (Bastaría que $N_{m+1}$ y $r_1$ fuesen ortogonales para anular $||e||_E$ por ejemplo).

Con los datos anteriores se puede establecer una expresión del error en función del residuo, estimado a partir de la hipótesis (16). Así, utilizando (17) y (13):

$$L_2 e_2 = a_{n+1} L_2 N_{n+1} \quad ; \quad r_2 = - a_{n+1} L_2 N_{n+1}$$

$$( L_1 e_1 = b_{m+1} L_1 N_{m+1} \quad ; \quad r_1 = - b_{m+1} L_1 N_{m+1} ) \tag{19}$$

de modo que, sustituyendo en (18) se obtiene:

$$||e||_E^2 = a_{n+1}^2 \int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} L_2 N_{n+1}$$

$$( ||e||_E^2 = b_{m+1}^2 \int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L_1 N_{m+1} ) \tag{20}$$

Si ahora se compara la expresión (20) con la (18) se observa que:

$$a_{n+1} = \frac{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} r_2}{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} L_2 N_{n+1}}$$

$$( b_{n+1} = \frac{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} r_1}{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L N_{m+1}} ) \tag{21}$$

y, sustituyendo de nuevo en (20) se llega a la expresión deseada para el <u>indicador</u>:

$$||e||_E^2 = \frac{\left[\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1}\, r_2\right]^2}{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1}\, L_2\, N_{n+1}}$$

$$\left( ||e||_E^2 = \frac{\left[\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}\, r_1\right]^2}{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}\, L\, N_{m+1}} \right) \tag{22}$$

## 4. INDICADOR GENERALIZADO DE PEANO

La ecuación (22) se corresponde estrechamente con el criterio de indicador establecido por Peano para el método de los elementos finitos adaptables. Para verlo conviene ponerlo en términos de los elementos de la matriz del sistema:

$$\underset{\sim}{K}\ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \tag{23}$$

a que se reduce el método de los elementos de contorno. Para mayor facilidad supongamos que se trata de un problema de Dirichlet puro, de modo que el vector de incógnitas $\underset{\sim}{x}$ contiene los coeficientes $b_j$ de la ecuación 6.

Cuando se añade una nueva ecuación m+1, resultado de incrementar el orden de aproximación en un elemento, la nueva ecuación obtenida al colocar la solución fundamental en el punto $P_{m+1}$ es:

$$K_{m+1,1}b_1 + K_{m+1,2}b_2 + \dots + K_{m+1,m}b_m + K_{m+1,m+1}b_{m+1} + p_{m+1} = 0 \tag{24}$$

de donde se puede despejar:

$$b_{m+1} = - \frac{\Sigma\, K_{m+1,j}\, x_j + p_{m+1}}{K_{m+1,\ m+1}} \tag{25}$$

y, por sustitución en (20), se obtiene la fórmula de Peano generalizada:

$$||e||_E^2 = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} K_{m+1,j}\, x_j + p_{m+1}\right)^2}{K_{m+1,m+1}} \cdot \frac{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}\, L_1\, N_{m+1}}{K_{m+1,m+1}} \tag{26}$$

En el caso de elementos finitos el segundo factor del segundo miembro es igual a la unidad, cosa que no sucede en el método de los elementos de contorno, donde la expresión es más complicada.

En efecto:

$$\frac{\partial\Omega_1 \; N_{m+1} \; L_1 \; N_{m+1}}{K_{m+1,m+1}} = \frac{-\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}(P) \quad \partial\Omega_1 \; N_{m+1}(Q)\,\phi^*(P,Q)}{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1}(Q)\,\phi^*(P_{m+1},Q)} \qquad (27)$$

Obsérvese que, mientras en el numerador tanto P como Q son puntos móviles - para la integración, en el denominador $P_{m+1}$ es el punto utilizado para establecer la ecuación y por tanto tan sólo Q es móvil en el elemento. En cualquier caso las integraciones sólo se realizan en el elemento refinado.

## 5. ESTIMADOR

La fijación de un buen estimador global es todavía un problema abierto. Existe no obstante un caso particular en que es posible obtener una expresión sencilla del estimador. Así en los casos tipo Neumann:

$$L_2 \; e_2 = \int_{\partial\Omega_2} e_2(Q) \; q^*(P,Q) + C \; e_2(P) \qquad (28)$$

si los elementos son rectos y, como es usual, el punto de colocación está contenido dentro del propio elemento:

$$q^*(P,Q) = 0 \qquad (29)$$

y, por tanto,

$$r_2(P) = - L_2 \; e_2 = - C \; e_2(P) \qquad (30)$$

Sustituyendo en (14):

$$||e||_E^2 = - \int_{\partial\Omega_2} e_2(P) \; r_2(P) = \frac{1}{C} \int_{\partial\Omega_2} r_2^{\,2}(P) \qquad (31)$$

y como $C = \frac{1}{2}$ al integrar dentro de un elemento cuya tangente es continua se tiene:

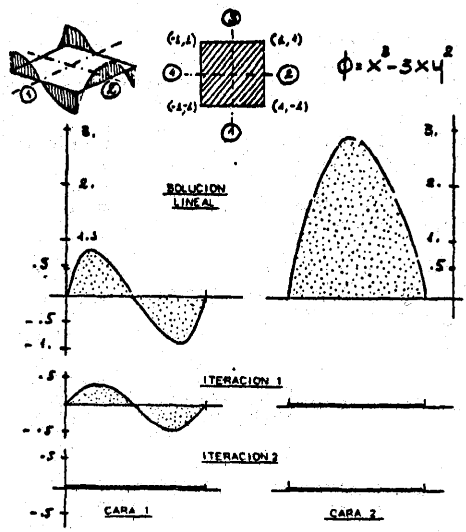
$$||e||_E^2 = 2 \int_{\partial\Omega_2} r_2^{\,2}(P) \qquad (32)$$

o sumando para cada elemento:

$$||e||_E^2 = 2 \; \Sigma \int_{\partial\Omega_i} r_2^{\,2}(P) \qquad (33)$$

La ecuación 33 puede utilizarse también en el caso de elementos curvos, mientras no se disponga de una mejor alternativa.

La figura 1 muestra los resultados obtenidos en un cuadrado para el caso de potencial plano y sucesivos refinamientos de la malla, observándose el buen comportamiento del indicador mencionado.




EVOLUCION DE LOS RESIDUOS

| | ELEMENTO 1 | ELEMENTO 2 |
|---|---|---|
| SOLUCION LINEAL | 0.4456 | 7.971 |
| ITERACION 1 | $5.34 \times 10^{-2}$ | $3.77 \times 10^{-3}$ |
| ITERACION 2 | $3.82 \times 10^{-3}$ | $3.95 \times 10^{-3}$ |

$\int r^2$

Figura 1

REFERENCIAS

1.- Jaswon, M.A. (1963): "Integral equations methods in potential theory I". Proc. Roy. Soc. (A) 275, 23-32.

2.- Rizzo, F.J. (1967): "An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics". Quart. Appl. Math. 25(1) 83-95.

3.- Cruse, T.A. (1969): "Numerical solutions in threedimensional elastostatics". Int. J. Solid & Struct. 5. 1259-1274.

4.- Lachat, J.C. (1973): "A further development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics". PhD Thesis. University of Southampton, U.K.

5.- Lachat, J.C. & Watson, J.O. (1974): "A second generation integral equation program for three-dimensional elastic analysis" in "Boundary-Integral equation method: Computational applications in Applied mechanics". (T.A. Cruse and F.J. Rizzo, Eds.). ASME, NY.

6.- Brebbia, C. (Ed.) (1978): "Recent advances in boundary element methods". Southampton, Pentech Press.

7.- Crouch, S.A. & Starfield, A.M. (1983): "Boundary element methods in solid mechanics". George Allen & Unwin.

8.- Jaswon, M.A. and Symm, G.T. (1977): "Integral equation methods in potential theory and elastostatics". Academic Press.

9.- Brebbia, C.A. (1978): "The boundary element for engineers". Pentech Press.

10.- Banerjee, P.K. & Butterfield, R. (1981): "Boundary element methods in engineering Science". McGraw Hill.

11.- Banerjee, P.K. & Butterfield, R. (1979): "Developments in boundary element methods 1". Applied Science Pub.

12.- Banerjee, P.K. & Shaw, R.P. (1982): "Developments in boundary element methods 2". Applied Science Pub.

13.- Ligget, J.A. & Liu, P.L. (1983): "The boundary integral equation method for - porous media flow". George Allen and Unwin.

14.- Alarcón, E. & Reyero, P. (1984): "An introductory guide to the boundary element method" (in Spanish). Polytech. University Press.

15.- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C. (1984): "Boundary Element Techniques". Springer-Verlag.

16.- Cruse, T.A. (1977): "Boundary Integral Equations. Fundamentals. Class-notes". Edited as "Mathematical Foundations of the BIEM in Solid Mechanics". AFOSR-TR-77-1002.

17.- García-Benítez, F. (1981): "The BIEM in 3-D elastoplasticity" (in Spanish). PhD Thesis. ETSII. Universidad Pol. Madrid.

18.- Gómez-Lera, S. (1982): "BIEM in Axisymmetric plasticity" (in Spanish). PhD Thesis. Univ. Pol. Madrid.

19.- Alarcón, E., Martín, A., París, F. (1979): "Some minor problems with BEM", in "Applied Numerical Modelling". Ed. E. Alarcón et al. Pentech Press.

20.- Arnold, D.N. & Wendland, W.L. (1982): On the asymptotic Convergence of Collocation Methods. Preprint 665, TH Darmstadt. Dept. of Mathematics, Fed. Rep. Germany.

21.- Rank, E. (1984): "A posteriori error estimates and adaptive refinement for some Boundary Integral Equations" in "ARFEC Conference", Ed. Babuska Oliveira, Zienckiewicz, Lisbon.

22.- Zienckiewicz, O.C., Irons, B.M., Scott, F.E. & Campbell, J.S. (1970): "High - Speed Computing of Elastic Structures". Proc. IUTAM, Liege.

23.- Peano, A.G. (1975): "Hierarchies of conforming finite elements", Doctoral Dissertation, Washington University, St. Louis.

24.- Babuska, K. & Rheinboldt, W.C. (1978): A posteriori error estimates for the - F.E.M. Int. Journ. Num. Meth. Eng. Vol. 12, 1597-1615.

25.- Babuska, I., Oliveira, E.R.A., Zienckiewicz, O.C. (1984): "Accuracy estimates and adaptive refinements in Finite Element Computations" (ARFEC). Lisbon.

26.- Peano, A.G. (1984): "General purpose systems based on adaptive finite elements. Software design considerations". ISMES leaflet.

27.- Babuska, I. (1975): "The selfadaptive approach in the F.E.M. in J.R. Whiteman" (Ed.) Mathem. of Fin. El. and Appl. Academic Press.

28.- Szabo, B.A., Basu, P.K., Rosow, M.P. (1978): "Adaptive Finite Element based on P-convergence". Nasa Conf. Pub. 2059, pp. 43-50.

29.- Kelly, D.W., Gago, J., Zienckiewicz, O.C. & Babuska, I. (1983): "A-posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method": parts I & II. Int. Journ. num. meth. eng. 19. 1593-1619.

30.- Alarcón, E., Abia, L., Reverter, A., (1984): "On the possibility of Adaptive Boundary Elements", Int. Conf. on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations". (ARFEC). Lisbon, June.

31.- Alarcón, E., Reverter, A., Molina, J. (1985): "Hierarchical boundary elements". Computers and Structures. Vol. 20, no's. 1-3, pp. 151-156.

32.- Alarcón, E. (1983): Letter to the editor. Internat. Journ. Num. Meth. in Eng. Vol. 19. No. 7, p. 1105.

33.- Alarcón, E., Ga Suárez, C., Reverter, A. (1984): "Improvements for BEM implementation in micros". In Lewis & Odorizi. Pineridge Press.

34.- Gago, J.P.S.R. (1982): "A-posteriori error analysis. And adaptivity for the finite element method". PhD Thesis. University of Wales.

35.- Reverter, A. (1984): "Adaptive boundary elements in 2-D potential theory" (in Spanish). Masters' Thesis. Polytechnical University of Madrid. Spain.

36.- Tuerteltaub, M.J. & Paluszyn, G. (1977): "Polynomial approximations in the direct potential method for plane elastostatics". In "Innovative numerical analysis in applied engineering science" CETIM, Versailles, France.